KONVERGENSI MODIFIKASI METODE POTRA - PTAK DENGAN MENGGUNAKAN KELENGKUNGAN KURVA

TUGAS AKHIR

Diajukan sebagai Salah Satu Syarat
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains
pada Jurusan Matematika

Oleh:

YUZI ANDRI SUHARYONO
10854004086

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SULTAN SYARIF KASIM RIAU
PEKANBARU

2013

KONVERGENSI MODIFIKASI METODE POTRA-PTAK DENGAN MENGGUNAKAN KELENGKUNGAN KURVA

YUZI ANDRI SUHARYONO
10854004086

Tanggal Sidang : 22 Mei 2013
Periode Wisuda : 27 Juni 2013

Jurusan Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No.155 Pekanbaru

ABSTRAK

Metode Potra-Ptak adalah salah satu metode yang digunakan untuk menentukan akar-akar persamaan nonlinier dengan orde konvergensi kubik. Kecepatan sebuah metode iterasi dalam mendekati akar –akar persamaan nonlinier bergantung pada orde konvergensinya. Semakin tinggi orde konvergensinya maka iterasinya semakin sedikit. Oleh karena itu, penulis memodifikasi metode Potra-Ptak dengan menggunakan kelengkungan kurva untuk meningkatkan orde konvergensi. Berdasarkan hasil kajian, diperoleh bahwa modifikasi metode Potra-Ptak dengan menggunakan kelengkungan kurva menghasilkan sebuah persamaan dengan konvergensi orde enam. dengan indeks efisiensinya sebesar 1,348 yang melibatkan tiga evaluasi fungsi yaitu $f(x_n)$, $f(y_n)$, $f(w_n)$ dan tiga evaluasi turunan $f'(x_n)$, $f'(y_n)$, $f'(w_n)$

Katakunci: *Kelengkungan Kurva, Metode Potra-Ptak, Orde Konvergensi*

CONVERGENCE A MODIFICATION POTRA-PTAK METHOD BY USING CURVATURE

YUZI ANDRI SUHARYONO
10854004086

Date of Final Exam : 22 May 2013
Date of Graduation Ceremony : 27 June 2013

Departement of Mathematics
Faculty of Science and Technology
State Islamic University of Sultan Syarif Kasim Riau
HR. Soebrantas Street No.155 Pekanbaru

ABSTRACT

Potra-Ptak method is one method that used to determine the roots of nonlinear equations with order of convergence three. the speed of a method depends on the order of convergence in minimizing the number of iteration. The higher the order of convergence of iteration the less. Therefore, in this paper the author modifying Potra-Ptak method using curvature curve to improve the order of convergence. Based on the results of the study, found that the modified method of Potra-Ptak by using the curvature of the curve produces an equation with convergence order of six. Efficiency index is 1,348 involving three evaluation functions: $f(x_n)$, $f(y_n)$, $f(w_n)$ *and three-derivative evaluation is* $f^{'}(x_n)$, $f^{'}(y_n)$, $f^{'}(w_n)$

Keywords: *Potra-Ptak method, Curvature, Order of convergence.*

KATA PENGANTAR

Syukur *alhamdulillah* penulis panjatkan kehadirat Allah SWT, yang telah melimpahkan rahmat dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir ini tepat pada waktunya. Tugas akhir ini merupakan salah satu syarat kelulusan tingkat sarjana. Shalawat beserta salam semoga tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW, mudah-mudahan selalu mendapat syafa'atnya.

Dalam penulisan, penyusunan dan penyelesaian tugas akhir ini, penulis telah banyak menerima petunjuk, bimbingan dan nasehat dari berbagai pihak. Untuk itu penulis mengucapakan terimakasih yang tak terhingga kepada kedua orang tua tercinta ibu dan bapak yang selalu memberikan do'a dan materi untuk menyelesaikan tugas akhir ini. Selanjutnya ucapkan terima kasih kepada :

1. Prof. Dr. H. M. Nasir selaku Rektor Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
2. Dra. Yenita Morena, M.Si. selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
3. Ibu Sri Basriati, S.Si., M.Sc. selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
4. Bapak Wartono, S.Si., M.Sc. selaku pembimbing yang telah banyak membantu, mengarahkan, mendukung, dan membimbing penulis dalam penulisan Tugas Akhir ini.
5. Untuk adik-adikku, Defri Bachtiar dan Nurilia Izzah Asfarina yang selalu memberikan semangat.
6. Semua Pengurus FU-Assalam dan adik-adik mentoring yang memberikan semangat untuk menyelesaikan tugas akhir ini.
7. Sahabatku Mater Club : Vidi, Adi, Nazar, Novi , Ali , Saihoni ,Ocu.
8. Kenangan Pondokan Salam : Mas Age, Mas Bakti, Bang Yulan dan Wardi
9. Bapak dan Ibu Dosen di lingkungan FST UIN SUSKA Riau, khususnya di Jurusan Matematika.
10. Teman-teman MT Angkatan 2008 yang tidak bisa saya sebutkan satu-persatu.

11. Semua pihak yang telah memberi bantuan dari awal sampai selesai Tugas Akhir ini yang tidak bisa disebutkan satu persatu.

Dalam penyusunan tugas akhir ini penulis telah berusaha semaksimal mungkin. Walaupun demikian tidak tertutup kemungkinan adanya kesalahan dan kekurangan baik dalam penulisan maupun dalam penyajian materi. Untuk itu penulis mengharapkan kritik dan saran dari berbagai pihak demi kesempurnaan tugas akhir ini.

Pekanbaru, 22 Mei 2013

Yuzi Andri Suharyono

DAFTAR ISI

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Pada persoalan matematika, sering kita temukan masalah dalam menentukan akar-akar persamaan nonlinier. Persamaan nonlinier melibatkan bentuk persamaan aljabar, trasenden, logaritma, trigonometri dan campuran. Metode yang sering digunakan untuk menyelesaikan persamaan nonlinier adalah metode Newton dengan orde konvergensi berbentuk kuadratik. Metode Newton sering digunakan untuk menyelesaikan persaman nonlinier karena metode Newton cepat menghampiri nilai eksak dan menghasilkan galat yang sangat kecil, dengan bentuk umum

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \; ; \; f'(x_n) \neq 0 \tag{1.1}$$

Dalam perkembangan ilmu matematika, metode Newton telah mengalami banyak modifikasi, tujuannya untuk mempercepat konvergensinya. Metode yang sudah dikembangkan yaitu Metode Potra - Ptak yang memiliki orde konvergensi tiga yang bentuk umumnya adalah:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n) + f(y_n)}{f'(x_n)} \tag{1.2}$$

dengan

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{1.3}$$

Salah satu peneliti telah melakukan modifikasi metode Potra-Ptak dengan menggunakan pendekatan, misalnya Reza Erzati dan Elham Azadegan (2009) memodifikasi Potra-Ptak Menggunakan Potra ganda yang menghasilkan orde lima.

Berdasarkan apa yang dilakukan peneliti tersebut, penulis tertarik untuk mengembangkan metode Potra –Ptak menggunakan kelengkungan kurva.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka penulis mengangkat rumusan masalah ”Bagaimana menentukan Orde Konvegensi Modifikasi metode Potra - Ptak dengan menggunakan kelengkungan kurva ?”

1.3 Batasan Masalah

Untuk menghindari luasnya pembahasan dalam tugas akhir ini, maka penulis mengambil batasan masalah yaitu :

a. Persamaan non linier dengan variabel tunggal dan memiliki akar tunggal

b. Simulasi numeriknya menggunakan Matlab 7.0.4 dan Maple

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian yang ingin dicapai dalam tugas akhir ini adalah

a. Mendapatkan persamaan iterasi modifikasi Potra –Ptak menggunakan kelengkungan kurva
b. Mendapatkan Orde konvergensi dari Metode Potra-Ptak
c. Mendapatkan Indeks efisiensi dari Metode Potra-Ptak
d. Mendapatkan Simulasi numerik dan COC dari Metode Potra-Ptak

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat penelitian dari tugas akhir ini adalah sebagai berikut:

a. Menambah pengetahuan penulis mengenai metode Potra - Ptak dalam menentukan solusi persamaan nonlinier.
b. Mendapatkan bentuk baru modifikasi metode Potra - Ptak menggunakan kelengkungan kurva.

1.6 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan skripsi ini mencakup lima bab yaitu :

Bab I Pendahuluan

Bab ini berisi tentang latar belakang, perumusan masalah, batasan masalah, tujuan dan manfaat penelitian.

Bab II Landasan Teori

Bab ini berisi tentang teori-teori dasar yang digunakan dalam penelitian yaitu: deret taylor, orde konvergensi, metode Newton dan orde konvergensi Newton dan metode Potra-Ptak dan orde konvergensinya.

Bab III Metodologi Penelitian

Bab ini berisi tentang metodologi penelitian yang membahas tentang langkah-langkah untuk menemukan rumusan baru dari metode Potra - Ptak yang dimodifikasi dengan kelengkungan kurva.

Bab IV Pembahasan

Bab ini berisi tentang pembahasan bagaimana bentuk rumusan baru dari metode Potra - Ptak yang dimodifikasi dengan kelengkungan kurva serta orde konvergensinya. Selain itu dilengkapi dengan simulasi numeriknya.

Bab V Penutup

Bab ini berisi tentang kesimpulan dan saran.

BAB II

LANDASAN TEORI

2.1 Orde Konvergensi

Orde konvergensi merupakan Parameter untuk mengukur tingkat percepatan dalam penyelesaiaan persamaan nonlinier $f(x) = 0$. Apabila suatu metode iterasi berorde dua maka metode iterasi ini akan konvergen secara kuadratik, dan apabila metode iterasi berorde tiga maka metode iterasi ini akan konvergen secara kubik, dan seterusnya. Definisi yang menjelaskan tentang orde konvergensi adalah sebagai berikut :

Definisi 2.1 (Mathews, (1992). Misalkan terdapat sebuah bilangan konstanta $c \geq 0$, bilangan bulat $n_0 \geq 0$, untuk semua $n > n_0$ dan $p \geq 0$ maka barisan $\{x_n\}$, dikatakan konvergen ke $\sim$ dengan orde konvergensi p, jika memenuhi ketentuan

$$\left|x_{n+1} - \sim\right| \leq c\left|x_n - \sim\right|^p \qquad (2.1)$$

Jika $p = 2$ atau $p = 3$ maka metode hampiran memiliki orde konvergensi kuadratik atau kubik. Misalkan $e_n = x_n - \sim$ merupakan kesalahan pada iterasi ke-n pada suatu metode yang menghasilkan suatu barisan $\{x_n\}$, maka suatu persamaan

$$e_{n+1} = ce_n^p + O(e_n^{p+1}), \qquad (2.2)$$

disebut sebagai persamaan kesalahan, sedangkan nilai p pada persamaan (2.2) menunjukan orde konvergensinya.

Misalkan orde konvergensi metode newton adalah

$$e_{n+1} = ce_n^2 + O(e_n^3)$$

Berdasarkan hasil di atas diperoleh bahwa persamaan kesalahan memiliki orde konvergensi 2

Untuk menegaskan tingkat orde konvergensi suatu metode iterasi, bisa kita selesaikan menggunakan metode *Computional Order of Convergence* (COC)

2.2 Computional Order of Convergence (COC)

Computional Order of Convergence (COC) merupakan parameter untuk menentukan orde konvergensi secara komputasi.

Definisi 2.2 (S.Weerakoon, 2000). Misalkan $\sim$ adalah akar untuk fungsi $f(x)$ dan andaikan $x_{n+1,} x_{n,} x_{n-1}$ berturut-turut adalah iterasi yang dekat dengan $\sim$.

Sehingga rumus

$$\circ \approx \frac{\ln\left|\left(x_{n+1} - \sim\right)/\left(x_n - \sim\right)\right|}{\ln\left|\left(x_n - \sim\right)/\left(x_{n-1} - \sim\right)\right|} \text{ atau } \circ \approx \frac{\ln\left|\left(e_{n+1}\right)/\left(e_n\right)\right|}{\ln\left|\left(e_n\right)/\left(e_{n-1}\right)\right|}$$

Contoh 2.2

a. Diberikan fungsi $f(x) = x^3 - 3x + 2$, dengan menggunakan rumus metode Newton tentukan iterasi untuk menentukan akar tunggal $\sim = -2$ serta konvergensi fungsi tersebut dengan nilai awal $x_0 = -2{,}4$ dan toleransi $¢ = 10^{-14}$

b. Diberikan fungsi $f(x) = x^3 - 3x + 2$,dengan menggunakan rumus metode Newton tentukan iterasi untuk menentukan akar ganda $\sim = 1$ serta konvergensi fungsi tersebut dengan nilai awal $x_0 = 1{,}2$ dan toleransi $¢ = 10^{-14}$

Penyelesaiaan:

Diketahui : $f(x) = x^3 - 3x + 2$

$\sim = -2$

$x_0 = -2{,}4$

Ditanya : iterasi dan konvergensi dengan menggunakan metode Newton

Jawab : untuk iterasi awal $x_0 = -2{,}4$

$$e_n = \left|x_n - \sim\right| = \left|-2{,}4000000000000 - (-2)\right| = 0{,}4000000000000$$

mencari COC rumusnya adalah

$$\circ \approx \frac{\ln\left|\left(e_{n+1}\right)/\left(e_n\right)\right|}{\ln\left|\left(e_n\right)/\left(e_{n-1}\right)\right|}$$

$$\circ \approx \frac{\ln|(e_2)/(e_1)|}{\ln|(e_1)/(e_0)|}$$

$$\circ \approx \frac{\ln|(0{,}035960106756567)/(0{,}0761904761904764)|}{\ln|(0{,}0761904761904764)/(0{,}400000000000000)|}$$

$$\circ \approx 1{,}84136997088$$

Jadi hasil COC untuk iterasi pertama adalah $1{,}84136997088$. Begitu pula untuk mencari iterasi selanjutnya.

Tabel 2.1 Hasil iterasi dan COC metode Newton dengan akar tunggal.

Iterasi	x_n	e_n	COC
0	-2,4000000000000000	0,4000000000000000	1,84136997088
1	-2.0761904761904764	0.0761904761904764	1,97712790740
2	-2.0035960106756567	0.0035960106756567	1,99941129295
3	-2.0000085899722211	0.0000085899722211	1.99940691500
4	-2.0000000000491913	0.0000000000491913	Tidak terdefinisi
5	-2.0000000000000000	0.0000000000000000	Tidak terdefinisi

Tabel.2.1 menunjukkan bahwa metode Newton dengan akar tunggal memiliki konvergensi kuadratik dengan $\circ \approx 2$.

Penyelesaian :

Tabel 2.2 Hasil iterasi dan COC metode Newton dengan akar ganda

Iterasi	x_n	e_n	COC
0	1,200000000	0,200000000	0,9909996418
1	1,103030303	0,103030303	1,011420402
2	1,052356417	0,052356417	1,001000703
3	1,026400814	0,026400814	1,003107847
4	1,013257734	0,013257734	1,001571799
5	1,006643418	0,006643418	1,000813247
6	1,003325387	0,003325387	Tidak Terdefinisi
7	1,001663559	0,001663598	Tidak Terdefinisi

Tabel 2.2 menunjukkan bahwa Metode Newton dengan akar ganda memiliki konvergensi linier $\circ \approx 1$

2.3 Indeks Efisiensi (Sharma J.R, 2011)

Indeks efisiensi merupakan parameter untuk menghitung efisien sebuah metode. Rumus untuk mencari indeks efisiensi yaitu:

$$E = P^{\frac{1}{w}} \tag{2.3}$$

dengan P adalah banyaknya orde konvergensi dari suatu metode, sedangkan w merupakan jumlah dari evaluasi fungsi dari metode tersebut termasuk juga turunannya. Semakin besar nilai indeksnya maka semakin efisien metode tersebut dalam menghampiri akar-akarnya.

Contoh 2.3 Tentukanlah nilai indeks dari metode Ostrowski dan Newton ganda

Penyelesaian :

a. Metode Ostrowski mempunyai tiga fungsi $f(x_n)$ dan $f^{'}(x_n)$, $f(y_n)$ sedangkan orde konvergensinya tingkat empat yaitu

$$e_{n+1} = (-C_2C_3 + 2C_2^3)e_n^4 + O(e_n^5)$$

Maka nilai indeksnya

$$\begin{aligned} E &= P^{\frac{1}{w}} \\ &= \sqrt[3]{4} \\ &= 1{,}587 \end{aligned}$$

Jadi metode Ostrowski memiliki efisiensi indeks $1{,}587$ dan waktu yang dibutuhkan untuk mencari efisiensi indeks metode Ostrowski sebanyak 2 menit.

b. Metode Newton ganda mempunyai empat fungsi $f(x_n)$ dan $f^{'}(x_n)$, $f(y_n)$, $f^{'}(y_n)$sedangkan orde konvergensinya tingkat empat yaitu

$$e_{n+1} = 2{c_2}^3{e_n}^4 + O({e_n}^5)$$

Maka nilai indeksnya

$$\begin{aligned} E &= P^{\frac{1}{w}} \\ &= \sqrt[4]{4} \\ &= 1{,}44 \end{aligned}$$

Jadi metode Newton ganda memiliki efisiensi indeks $1{,}414$ dan waktu yang dibutuhkan untuk mencari efisiensi indeks metode Newton ganda adalah 4 menit.

Kesimpulan : Jadi metode Ostrowski lebih efektif dalam menyelesaikan persamaan nonlinier karena efisiensi indeksnya lebih besar.

2.4 Deret Taylor

Deret Taylor adalah representasi fungsi matematika sebagai jumlahan tak hingga dari suku-suku yang nilainya dihitung dari turunan fungsi disuatu titik. Deret Taylor merupakan deret yang berbentuk polinomial yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan nonlinier.

Teorema 2.4 Deret Taylor (Purcell dkk, (2003). Misalkan f adalah fungsi yang mempunyai turunan ke $(n+1)$-nya $f^{(n+1)}(x)$ ada untuk setiap x pada selang terbuka I yang disekitar x_0. Maka $f(x)$ dapat ditulis

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n)!}(x - x_0)^n \qquad (2.4)$$

Jika deret Taylor pada persamaan (2.4) dipotong pada suku ke –n ,dengan sisa $R_n(x)$ maka persamaan Taylor menjadi

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots$$

$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n)!}(x - x_0)^n + R_n(x) \qquad (2.5)$$

dengan

$R_n(x)$ adalah sisa atau kesalahannya dinyatakan dengan rumus

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - a)^{n+1} \qquad (2.6)$$

dan c adalah titik diantara x dan a.

Misalkan hasil pemotongan deret Taylor disebut Polinomial Taylor ke $P_n(x)$ maka persamaan deret Taylor menjadi

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \cdots$$

$$+\ \frac{f^{n}(x_0)}{n\ !}(x-x_0)^n \tag{2.7}$$

dan persamaan (2.5) dapat ditulis lagi dalam bentuk

$$f(x)=P_n(x)+R_n(x) \tag{2.8}$$

Bukti :

Untuk membuktikan persamaan (2.8) gunakan rumus ekspansi Taylor untuk mengaproksimasi fungsi *f* di sekitar x_n, dimana $:x_n = \sim + e_n$, dan $R_n(x)=O(h^{n+1})$, maka persamaan teorema Taylor (2.7) dan bentuk suku sisanya (2.6) dapat ditulis kembali dalam bentuk:

$$f(x_n)= f(\sim)+ f'(\sim)e_n+\frac{f''(\sim)}{2!}(e_n)^2+\cdots$$

$$+\frac{f^{(n)}(\sim)^n}{(n)!}(e_n)^n+\frac{f^{(n+1)}(c)(e_n)^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$f(x_n)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(\sim)}{n!}e_n^k+\frac{f^{(n+1)}(c)(h)^{n+1}}{(n+1)!} \tag{2.9}$$

maka,

$$f(\sim+e_n)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(\sim)}{n!}e_n^k+O(h^{n+1}) \tag{2.10}$$

2.5 Metode Newton dan Konvergensinya

Metode Newton adalah metode yang paling terkenal dan paling banyak digunakan dalam bidang Sains dan Rekayasa. Hal ini karena metode Newton konvergensinya paling cepat. Metode Newton berasal dari turunan deret Taylor orde pertama. Metode ini sering digunakan untuk mencari akar-akar persamaan nonlinier.

Misalkan fungsi f dapat diekspansi disekitar $x=x_n$ menggunakan deret Taylor dengan x_n pendekatan $f(x)=0$,jika $f(x)$ diekspansi disekitar $x=x_n$ sampai orde pertama, maka diperoleh

$$f(x)\approx f(x_n)+(x-x_n)f^{'}(x_n) \tag{2.11}$$

dengan $f(x)=0$, kemudian disubstitusikan ke persamaan (15) dengan mengambil $x=x_{n+1}$,sehingga

$$0 \approx f(x_n) + (x - x_n) f^{'}(x_n)$$

$$(x_{n+1} - x_n) f^{'}(x_n) \approx -f(x_n)$$

$$(x_{n+1} - x_n) \approx \frac{-f(x_n)}{f^{'}(x_n)}$$

$$(x_{n+1}) = x_n - \frac{f(x_n)}{f^{'}(x_n)} \text{ untuk } n = 0,1,2,\cdots \qquad (2.12)$$

Persamaan di atas merupakan persaman umum dari metode Newton.

Untuk mencari orde konvergensi dari Metode Newton dapat diselesaikan menggunakan teorema dibawah ini :

Teorema 2.5: Misalkan $f(x)$ adalah fungsi bernilai rill yang mempunyai turunan pertama, kedua dan ketiga pada interval (*a,b*). Jika $f(x)$ mempunyai akar $\sim$ pada interval (*a,b*) dan x_0 adalah nilai tebakan awal yang cukup dekat ke $\sim$, maka metode iterasi pada persamaan (2.17) memenuhi persamaan error:

$$e_n = x_n - \sim \text{ dan } C_j = \frac{1}{j!}\frac{f^{(j)}(\sim)}{f'(\sim)} \quad k = 1,2,3,\cdots$$

Bukti :

Misalkan $\sim$ adalah akar dari $f(x)$, maka $f(\sim) = 0$. Asumsikan $f'(x) \neq 0$ dan $x_n = \sim + e_n$, dan dengan menggunkan rumus ekspansi Taylor untuk mengaproksimasi fungsi *f* di sekitar x_n, diperoleh

$$f(x_n) = f(\sim + e_n)$$

$$= f(\sim) + f^{'}(\sim)(e_n) + \frac{f^{''}(\sim)}{2!}(e_n)^2 + \frac{f^{'''}(\sim)}{3!}(e_n)^3 + ...$$

$$= f(\sim) + f'(\sim)e_n + \frac{1}{2!}f''(\sim)e_n^2 + \frac{1}{3!}f'''(\sim)e_n^3 + O(e_n^4) \qquad (2.13)$$

karena $f(\sim) = 0$, maka dengan melakukan manipulasi aljabar pada persamaan (2.13) diperoleh

$$f(x_n) = f'(\sim)\left(e_n + \frac{1}{2!}\frac{f''(\sim)e_n^2}{f'(\sim)} + \frac{1}{3!}\frac{f'''(\sim)e_n^3}{f'(\sim)} + \frac{O(e_n^4)}{f'(\sim)}\right)$$

$$= f'(\sim)\left(e_n + \frac{1}{2!}\frac{f''(\sim)e_n^2}{f'(\sim)} + \frac{1}{3!}\frac{f'''(\sim)e_n^3}{f'(\sim)} + O(e_n^4)\right) \tag{2.14}$$

misalkan $C_j = \frac{1}{j!}\frac{f^{(j)}(\sim)}{f'(\sim)}$ $k = 1,2,3,\cdots$, maka persamaan (2.14) dapat ditulis kembali menjadi

$$f(x_n) = f'(\sim)\left(e_n + C_2 e_n^2 + C_3 e_n^3 + O(e_n^4)\right) \tag{2.15}$$

Jika untuk $f'(x_n)$ dilakukan ekspansi Taylor di sekitar $x = \sim$ maka

$$f'(x_n) = f'(\sim)\left(1 + \frac{f''(\sim)e_n}{f'(\sim)} + \frac{1}{2!}\frac{f'''(\sim)e_n^2}{f'(\sim)} + \frac{O(e_n^3)}{f'(\sim)}\right)$$

$$= f'(\sim)\left(1 + \frac{f''(\sim)e_n}{f'(\sim)} + \frac{1}{2!}\frac{f'''(\sim)e_n^2}{f'(\sim)} + O(e_n^3)\right)$$

$$= f'(\sim)\left(1 + \frac{2!}{2!}\frac{f''(\sim)e_n}{f'(\sim)} + \frac{3}{3}\frac{f'''(\sim)e_n^2}{2!\,f'(\sim)} + O(e_n^3)\right)$$

$$= f'(\sim)\left(1 + \frac{2f''(\sim)e_n}{2!\,f'(\sim)} + \frac{3f'''(\sim)e_n^2}{3!\,f'(\sim)} + O(e_n^3)\right)$$

$$= f'(\sim)\left(1 + 2C_2 e_n + 3C_3 e_n^2 + O(e_n^3)\right) \tag{2.16}$$

Apabila persamaan (2.15) dibagi dengan persamaan (2.16) diperoleh

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \frac{f'(\sim)\left(e_n + C_2 e_n^2 + C_3 e_n^3 + O(e_n^4)\right)}{f'(\sim)\left(1 + 2C_2 e_n + 3C_3 e_n^2 + O(e_n^3)\right)}$$

$$= \frac{\left(e_n + C_2 e_n^2 + C_3 e_n^3 + O(e_n^4)\right)}{\left(1 + 2C_2 e_n + 3C_3 e_n^2 + O(e_n^3)\right)} \tag{2.17}$$

Dengan menggunakan ekspansi deret taylor , dalam bentuk

$$\frac{1}{1+u} = (1 - u + u^2 - u^3 + \ldots)$$

Maka persamaan (2.17) dapat diubah menjadi

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \left(e_n + C_2 e_n^2 + C_3 e_n^3 + O(e_n^4)\right) \times \left(1 + 2C_2 e_n + 3C_3 e_n^2 + O(e_n^3)\right)^{-1}$$

$$= \left(e_n + C_2 e_n^2 + C_3 e_n^3 + O(e_n^4)\right)\left(1 - \left(2C_2 e_n + 3C_3 e_n^2 + O(e_n^3)\right) + \left(2C_2 e_n + 3C_3 e_n^2 + O(e_n^3)\right)^2 - \ldots\right)$$

$$= \left(e_n + C_2 e_n^2 + C_3 e_n^3 + O(e_n^4)\right)\left(1 - \left(2C_2 e_n + 3C_3 e_n^2 + O(e_n^3)\right) + \left(4C_2^2 e_n^2 + \ldots\right)\right)$$

$$= \left(e_n + C_2 e_n^2 + C_3 e_n^3 + O(e_n^4)\right)\left(1 - 2C_2 e_n + \left(4C_2^2 - 3C_3\right)e_n^2 + O(e_n^3)\right)$$

$$= e_n - C_2 e_n^2 + \left(2C_2^2 - 2C_3\right)e_n^3 + O(e_n^4) \qquad (2.18)$$

Selanjutnya persamaan (2.18) substitusikan ke persamaan Newton dan diperoleh

$$x_{n+1} = x_n - \left(e_n - C_2 e_n^2 + \left(2C_2^2 - 2C_3\right)e_n^3 + O(e_n^4)\right)$$

$$e_{n+1} + \sim\ = e_n + \sim - e_n + C_2 e_n^2 - \left(2C_2^2 - 2C_3\right)e_n^3 - O(e_n^4)$$

$$e_{n+1} = C_2 e_n^2 - \left(2C_2^2 - 2C_3\right)e_n^3 - O(e_n^4)$$

$$e_{n+1} = C_2 e_n^2 + O(e_n^3) \qquad (2.19)$$

Berdasarkan hasil di atas maka Newton memiliki orde konvergensi kuadratik.

2.6 Metode Potra - Ptak dan Orde Konvergensinya

Diberikan persamaan metode Potra-Ptak sebagai berikut:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n) + f(y_n)}{f^{'}(x_n)} \quad n = 0,1,2,3,...$$

dengan

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f^{'}(x_n)}$$

Orde konvergensi metode Potra-Ptak dapat ditentukan dengan cara sebagai berikut :

Misalkan $f(x) = 0$ dan $\sim$ adalah akar dari fungsi $f(x)$ tersebut, maka $f(\sim) = 0$ dan asumsikan bahwa $f^{'}(x) \neq 0$. Dengan menggunakan ekspansi taylor untuk $f(x_n)$ di sekitar $x = \sim$ diperoleh

$$f(x_n) = f(\sim + e_n)$$

$$= f(\sim) + f'(\sim)e_n + \frac{1}{2!}f''(\sim)e_n^2 + \frac{1}{3!}f'''(\sim)e_n^3 + O(e_n^4) \qquad (2.20)$$

Oleh karena $f(\sim) = 0$, maka dengan melakukan manipulasi aljabar pada persamaan (2.20) diperoleh

$$f(x_n) = f'(\sim)\left(e_n + \frac{1}{2!}\frac{f''(\sim)e_n^2}{f'(\sim)} + \frac{1}{3!}\frac{f'''(\sim)e_n^3}{f'(\sim)} + \frac{O(e_n^4)}{f'(\sim)}\right)$$

$$= f'(\sim)\left(e_n + C_2 e_n^2 + C_3 e_n^3 + O(e_n^4)\right) \qquad (2.21)$$

Sedangkan untuk $f^{'}(x)$ dapat diperoleh dengan mengekspansinya di sekitar $x = \sim$ maka

$$f'(x_n) = f'(\sim)\left(1 + \frac{f''(\sim)e_n}{f'(\sim)} + \frac{1}{2!}\frac{f'''(\sim)e_n^2}{f'(\sim)} + \frac{O(e_n^3)}{f'(\sim)}\right)$$

$$= f'(\sim)\left(1 + 2C_2e_n + 3C_3e_n^2 + O(e_n^3)\right) \tag{2.22}$$

Karena y_n adalah Newton dan sudah dibuktikan pada persamaan (2.19) maka dapat ditulis

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f^{'}(x_n)}$$

$$= \sim + e_n - (e_n - C_2e_n^2 + \left(2C_2^2 - 2C_3\right)e_n^3 + O(e_n^4))$$

$$= \sim + C_2e_n^2 + \left(2C_2^2 - 2C_3\right)e_n^3 + O(e_n^4)) \tag{2.23}$$

untuk itu,

$$f(y) = f^{'}(\sim)(C_2e_n^2 + (2C_3 - 2C_2^2)e_n^3 + (-7C_2C_3 + 3C_4 - 4C_2^3)e_n^4 + O(e_n^5))$$

kemudian untuk

$$\frac{f(x_n) + f(y_n)}{f^{'}(x_n)} = \frac{f^{'}(\sim)(C_2e_n^2 + (2C_3 - 2C_2^2)e_n^3 + (-7C_2C_3 + 3C_4 - 4C_2^3)e_n^4}{f'(\sim)\left(1 + 2C_2e_n + 3C_3e_n^2 + O(e_n^3)\right)}$$

$$= \frac{(C_2e_n^2 + (2C_3 - 2C_2^2)e_n^3 + (-7C_2C_3 + 3C_4 - 4C_2^3)e_n^4}{\left(1 + 2C_2e_n + 3C_3e_n^2 + O(e_n^3)\right)} \tag{2.24}$$

berdasarkan ekspansi deret taylor dalam bentuk

$$\frac{1}{1+u} = (1 - u + u^2 - u^3 + ...)$$

dengan $u = \left(2C_2e_n + 3C_3e_n^2 + O(e_n^3)\right)$

maka

$$\frac{f(x_n) + f(y_n)}{f^{'}(x_n)} = e_n - 2C_2^2e_n^3 + \left(7c_2c_3 - 8c_2^3\right)e_n^4 + O\left(e_n^5\right) \tag{2.25}$$

Kemudian persamaan (2.25) disubstitusikan ke persamaan Potra-Ptak sehingga diperoleh :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n) + f(y_n)}{f^{'}(x_n)}$$

$$= \sim + 2C_2 e_n^3 + \left(7c_2 c_3 - 8C_2^3\right) e_n^4 + O(e_n^5))$$

$$= \sim + 2C_2 e_n^3 + O(e_n^4))$$

Oleh karena $x_{n+1} = e_{n+1} + \sim$ maka persamaan galat Potra diperoleh Sbb :

$$x_{n+1} = \sim + 2c_2^2 e_n^3 + O\left(e_n^4\right)$$

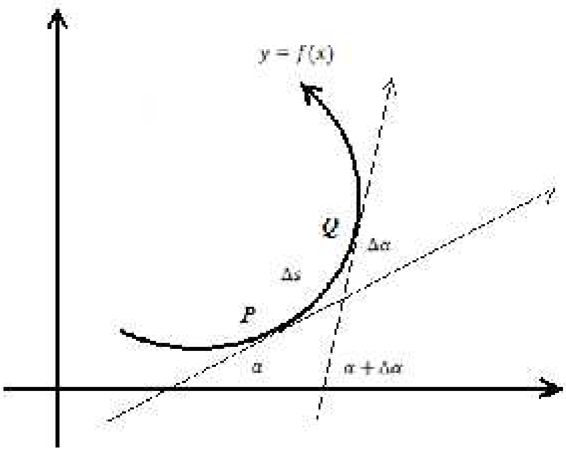
$$e_{n+1} + \sim = \sim + 2c_2^2 e_n^3 + O\left(e_n^4\right)$$

$$e_{n+1} = 2c_2^2 e_n^3 + O\left(e_n^4\right) \qquad (2.26)$$

Persamaan (2.26) merupakan persamaan galat dari metode Potra-Ptak , sehingga metode Potra-Ptak memiliki orde konvergensi kubik.

2.7 Kelengkungan Kurva

Berikut ini akan diberikan konsep tentang Kelengkungan Kurva yang akan digunakan untuk memodifikasi persamaan Potra dan Ptak.



Gambar 1. Kelengkungaan kurva

Garis singgung di P bersudut $\sim$. Bila P digerakkan sampai titik Q sepanjang busur ΔS ,maka terjadi perubahan sudut arah garis singgung sebesar $\Delta\sim$. Sudut arah garis singgung di Q menjadi ($\sim + \Delta\sim$). Kecepatan perubahan sudut arah garis singgung sepanjang ΔS ini menunjukkan ukuran kelengkungan kurva. Secara matematika, ukuran kelengkungan disembarang titik pada kurva dilambangkan dengan k (kappa) yang didefinisikan oleh :

$$K = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\sim}{\Delta s} = \frac{d\sim}{ds}$$

Gerakan titik pada kurva yang lebih melengkung menunjukkan kecepatan perubahan sudut arah garis singgungnya lebih besar. Kurva yang lebih melengkung menunjukkan jari-jari kelengkungannya lebih kecil, karena jari-jari kelengkungan ($^\circ$) berbanding terbalik dengan ukuran kelengkungan (K) .

Jari-jari kelengkungan dirumuskan $^\circ = \left|\frac{1}{K}\right|$, dengan $K \neq 0$

Untuk rumus kelengkungan dan jari-jari kelengkungan kita peroleh :

$$K = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\sim}{\Delta s} = \frac{d\sim}{ds} = \pm \frac{\dfrac{d^2 y}{dx^2}}{\left(1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right)^{3/2}} = \pm \frac{y''}{\left(1 + (y)^2\right)^{3/2}}$$

Atau dinyatakan dalam y adalah

$$K = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\sim}{\Delta s} = \frac{d\sim}{ds} = \pm \frac{\dfrac{d^2 x}{dy^2}}{\left(1 + \left(\dfrac{dx}{dy}\right)^2\right)^{3/2}} = \pm \frac{x''}{\left(1 + (x')^2\right)^{3/2}}$$

Tanda $\pm$ pada K menujukkan bahwa : Bila K positif arah kurvanya melengkung keatas /cekung $(\cup)$, sedangkan bila K negatif arah kurvanya melengkung kebawah $(\cap)$.

Bukti:

Dari pengertian kelengkungan kurva $K = \lim\limits_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \sim}{\Delta s} = \frac{d\sim}{ds}$ dan $\tan \sim$ adalah kemiringan garis singgung ,maka diperoleh :

$$(\Delta s)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$$

$$\left(\frac{\Delta s}{\Delta x}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2$$

$$\left(\frac{\Delta s}{\Delta x}\right) = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}$$

Dalam keadaan lim $\Delta x \to 0$ maka:

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \sim}{\Delta s} = \pm \lim_{\Delta s \to 0} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} \quad \text{atau} \quad \frac{ds}{dx} = \pm \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \qquad (2.27)$$

Selanjutnya,

$$\tan \sim = \frac{dy}{dx}$$

maka,

$$\sim = arc \ \tan\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

$$\frac{d\sim}{dx} = \frac{d}{dx}\left[arc.\tan\left(\frac{dy}{dx}\right)\right]$$

$$\frac{d\sim}{dx} = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{\sec^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)\right]$$

$$\frac{d\sim}{dx} = \frac{1}{1+\tan^2}\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

$$\frac{d\sim}{dx} = \frac{1}{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

$$\frac{d\sim}{dx} = \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \qquad (2.28)$$

Berdasarkan persamaan (2.27) dan (2.28), maka diperoleh :

$$K = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \sim}{\Delta s} = \frac{d\sim}{ds}$$

$$K = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \sim}{\Delta s} = \frac{d\sim}{ds} = \frac{d\sim / dx}{ds / dx}$$

$$K = \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{3/2}} = \frac{y''}{\left(1 + (y')^2\right)^{3/2}}$$

Dan untuk menghitung jari-jari kelengkungan kurvanya kita ketahui bahwa rumus dari jari-jari kelengkungan kurva adalah

$$\circ = \left|\frac{1}{K}\right| = \left| \frac{1}{\frac{d^2 y}{dx^2}} \Bigg/ \left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{3/2} \right| = \frac{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{3/2}}{\frac{d^2 y}{dx^2}} = \frac{\left(1 + (y')^2\right)^{3/2}}{y''}$$

Sedangkan pusat kelengkungan sebuah titik $P(x, y)$ pada kurva adalah pusat C dari lingkaran kelengkungan di P. Koordinat $(\sim, \quad)$ dari pusat kelengkungan diberikan oleh:

$$\sim = x - \frac{\frac{dy_n}{dx}\left[1 + \left(\frac{dy_n}{dx}\right)^2\right]}{d^2 y_n / dy^2} = x - \frac{y'_n \left[1 + y'^2_n\right]}{y''_n} \tag{2.29}$$

dan

$$= y + \frac{1 + \left(\frac{dy_n}{dx}\right)^2}{d^2 y_n / dy^2} = y + \frac{1 + y'^2_n}{y''_n} \tag{2.30}$$

Sedemikian sehingga, untuk kelengkungan kurva pada sebarang titik dapat dirumuskan sebagai:

$$(x - \sim)^2 + (y - \quad)^2 = R^2$$

$$\left(x - x_n + \frac{y_n\left[1 + y'^{\,2}_n\right]}{y''_n} \right)^2 + \left(y - y_n + \frac{1 + y'^{\,2}_n}{y''_n} \right)^2 = \left(\frac{\left(1 + y'^{\,2}_n\right)^{3/2}}{y''_n} \right)^2$$

$$\left(x - x_n + \frac{y_n\left[1 + y'^{\,2}_n\right]}{y''_n} \right)^2 + \left(y - y_n + \frac{1 + y'^{\,2}_n}{y''_n} \right)^2 = \frac{(1 + y'^{\,2}_n)^3}{y''^{\,2}_n}$$

BAB III
METODOLOGI PENELITIAN

Penulisan tugas akhir ini menggunakan metode *research library* (penelitian kepustakaan) yang bertujuan mengumpulkan data dan informasi yang dibutuhkan dalam penelitian yang berasal dari buku-buku, jurnal serta artikel yang berhubungan dengan penelitian yang akan diuraikan menjadi dasar penelitian.

Langkah-langkahnya adalah sebagai berikut:

1. Mendefinisikan metode Potra orde tiga yaitu:

$$z_n = x_n - \frac{f(x_n) + f(y_n)}{f'(x_n)} \quad n = 0,1,2,3,...$$

dengan

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

dan orde konvergensinya $e_{n+1} = 2c_2^2 e_n^3 + O(e_n^4)$.

2. Mendefinisikan Kelengkungan Kurva di $(z_n, f'(z_n))$ sehingga diperoleh persamaan baru

$$\left(x - z_n + \frac{f'(z_n)\left[1 + f'(z_n)^2\right]}{f''(z_n)} \right)^2 + \left(y - f(z_n) + \frac{1 + f'(z_n)^2}{f''(z_n)} \right)^2 = \frac{(1 + f'(z_n)^2)^3}{f''(z_n)^2} \quad (3.1)$$

3. Mensubstitusikan persamaan (3.1) pada titik $(x_{n+1}, 0)$ terhadap sumbu x.
4. Hasil substitusi persamaan (3.1) pada titik $(x_{n+1}, 0)$ terhadap sumbu x disubstitusikan kembali terhadap

$$f''(z_n) \approx \frac{f'(w_n) - f'(z_n)}{w_n - z_n} \quad (3.2)$$

dengan

$$w_n = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)}$$

5. Menentukan orde konvergensi yang dihasilkan berdasarkan rumusan iterasi.

6. Membuat beberapa fungsi simulasi numerik menggunakan bahasa pemograman *Matlab*.
7. Membandingkan dengan hasil penelitian lain, seperti metode Newton (Orde konvergensi dua), Potra (Orde konvergensi tiga), Potra yang dimodifikasi (Orde lima).

BAB IV

PEMBAHASAN

Pada bab empat ini akan dibahas mengenai modifikasi metode Potra-Ptak menggunakan kelengkungan kurva dimana didapat persamaan baru, mencari orde konvergensi dan membuat simulasi numeriknya serta membandingkan dengan penelitian lain, seperti metode Newton (Orde konvergensinya 2), metode Potra-Ptak (Orde konvergensinya 3), metode Potra-Ptak menggunakan kelengkungan kurva (Orde konvergensinya 6), metode Jarrat yang dimodifikasi kelengkungan kurva dengan orde konvergensi dua belas dan lebih jelasnya akan dibahas per sub bab sebagai berikut :

4.1 Modifikasi Metode Potra Ptak Menggunakan Kelengkungan Kurva

Pada sub bab berikut akan dibahas mengenai modifikasi Potra-Ptak menggunakan kelengkungan kurva. Diberikan persamaan metode Potra-Ptak sebagai berikut,

$$z_n = x_n - \frac{f(x_n) + f(y_n)}{f^{'}(x_n)} \quad n = 0,\ 1,\ 2,\ 3 \tag{4.1}$$

dengan

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Diketahui rumus dari kelengkungan kurva adalah sebagai berikut:

$$\left(x - x_n + \frac{y_n\left[1 + y'^{\,2}_n\right]}{y''_n} \right)^2 + \left(y - y_n + \frac{1 + y'^{\,2}_n}{y''_n} \right)^2 = \frac{(1 + y'^{\,2}_n)^3}{y''^{\,2}_n} \tag{4.2}$$

Misalkan persamaan (4.2) dengan menggunakan perhitungan dasar kelengkungan kurva titik $(z_n, f(z_n))$ diperoleh:

$$\left(x - z_n + \frac{f^{'}(z_n)\left[1 + f^{'}(z_n)^2\right]}{f^{''}(z_n)} \right)^2 + \left(y - f^{'}(z_n) + \frac{1 + f^{'}(z_n)^2}{f^{''}(z_n)} \right)^2 = \frac{\left(1 + f^{'}(z_n)^2\right)^3}{f^{''}(z_n)^2} \tag{4.3}$$

Misalkan persamaan (4.3) memotong sumbu x di titik $(x_{n+1},0)$, maka diperoleh

$$\left(x_{n+1}-z_n+\frac{f^{'}(z_n)\left[1+f^{'}(z_n)^2\right]}{f^{''}(z_n)}\right)^2+\left(-f^{'}(z_n)+\frac{1+f^{'}(z_n)^2}{f^{''}(z_n)}\right)^2=\frac{\left(1+f^{'}(z_n)^2\right)^3}{f^{''}(z_n)^2} \qquad (4.4)$$

Persamaan (4.4) dapat dijabarkan menjadi

$$(x_{n+1}-z_n)^2+2(x_{n+1}-z_n)\frac{f^{'}(z_n)\left(1+f^{'}(z_n)^2\right)}{f^{''}(z_n)}+\left(\frac{f^{'}(z_n)\left[1+f^{'}(z_n)^2\right]}{f^{''}(z_n)}\right)^2+f(z_n)^2$$

$$+2f(z_n)\frac{1+f^{'}(z_n)^2}{f^{''}(z_n)}+\left(\frac{1+f^{'}(z_n)^2}{f^{''}(z_n)}\right)^2=\frac{(1+f^{'}(z_n)^2)^3}{f^{''}(z_n)^2}$$

$$(x_{n+1}-z_n)^2+2(x_{n+1}-z_n)\frac{f^{'}(z_n)\left(1+f^{'}(z_n)^2\right)}{f^{''}(z_n)}+f(z_n)^2+2f(z_n)\frac{1+f^{'}(z_n)^2}{f^{''}(z_n)}$$

$$+\left(\frac{f^{'}(z_n)\left[1+f^{'}(z_n)^2\right]}{f^{''}(z_n)}\right)^2+\left(\frac{1+f^{'}(z_n)^2}{f^{''}(z_n)}\right)^2=\frac{(1+f^{'}(z_n)^2)^3}{f^{''}(z_n)^2} \qquad (4.5)$$

Selanjutnya persamaan (4.5) dijabarkan kembali sehingga didapat

$$(x_{n+1}-z_n)^2+2(x_{n+1}-z_n)(\frac{f^{'}(z_n)(1+f^{'}(z_n)^2)}{f^{'}(z_n)}+f(z_n)^2+2f(z_n)\frac{1+f^{'}(z_n^{'})^2}{f^{'}(z_n)}$$

$$=\frac{(1+f^{'}(z_n^{'})^2)^3}{f^{''}(z_n)^2}-\left(\frac{f^{'}(z_n)\left[1+f^{'}(z_n)^2\right]}{f^{''}(z_n)}\right)^2-\left(\frac{1+f^{'}(z_n)^2}{f^{''}(z_n)}\right)^2 \qquad (4.6)$$

Kemudian persamaan (4.6) difaktorisasi dengan faktor $(1+f^{'}(z_n)^2)$ sehingga persamaan (4.6) menjadi

$$(x_{n+1}-z_n)^2+2(x_{n+1}-z_n)(\frac{f^{'}(z_n)(1+f^{'}(z_n)^2)}{f^{'}(z_n)}+f(z_n)^2+2f(z_n)\frac{1+f^{'}(z_n^{'})^2}{f^{'}(z_n)}$$

$$=\frac{\left(1+f^{'}(z_n)^2\right)^2\left(1+f^{'}(z_n)^2-f^{'}(z_n)^2-1\right)}{f^{''}(z_n)^2} \qquad (4.7)$$

Oleh karena aproksimasinya pada titik $(x_{n+1},0)$, maka persamaan (4.7) menjadi

$$(x_{n+1}-z_n)^2+2(x_{n+1}-z_n)(\frac{f^{'}(z_n)(1+f^{'}(z_n)^2)}{f^{'}(z_n)}+f(z_n)^2+2f(z_n)\frac{1+f^{'}(z_n^{'})^2}{f^{'}(z_n)}$$

$$= \frac{\left(1 + f^{''}(z_n)^2\right)^2 (0)}{f^{"}(z_n)^2}$$

$$(x_{n+1} - z_n)^2 + 2(x_{n+1} - z_n)(\frac{f^{'}(z_n)(1 + f^{'}(z_n)^2)}{f^{'}(z_n)} + f(z_n)^2 + 2f(z_n)\frac{1 + f^{'}(z_n^{'})^2}{f^{'}(z_n)} = 0 \quad (4.8)$$

Persamaan (4.8) di atas dapat ditulis kembali menjadi suatu persamaan baru dengan melakukan pemindahan ruas yang tidak mengandung ($x_{n+1} - z_n$) ,sehingga diperoleh

$$(x_{n+1} - z_n)^2 + 2(x_{n+1} - z_n)(\frac{f^{'}(z_n)(1 + f^{'}(z_n)^2)}{f^{'}(z_n)} = -\left[f(z_n)^2 + 2f(z_n)\frac{1 + f^{'}(z_n^{'})^2}{f^{'}(z_n)} \right] \quad (4.9)$$

Kemudian persamaan (4.9) disederhanakan terhadap $x_{n+1} - z_n$ sehingga persamaan (4.9) menjadi

$$\left(x_{n+1} - z_n\right)\left[\left(x_{n+1} - z_n\right) + 2\frac{f^{'}(z_n)\left(1 + f^{'}\left(z_n\right)^2\right)}{f^{"}\left(z_n\right)}\right] = -\left[f(z_n)^2 + 2f(z_n)\frac{1 + f^{'}(z_n)^2}{f^{"}(z_n)} \right] \quad (4.10)$$

$$\left(x_{n+1} - z_n\right) = -\frac{\left[f(z_n)^2 + 2f(z_n)\frac{1 + f^{'}(z_n)^2}{f^{"}(z_n)} \right]}{\left[\left(x_{n+1} - z_n\right) + 2\frac{f^{'}\left(z_n\right)\left(1 + f^{'}\left(z_n\right)^2\right)}{f^{"}\left(z_n\right)}\right]} \quad (4.11)$$

Jika z_n diruas kiri dipindahkan keruas kanan maka persamaan (4.11) menjadi

$$x_{n+1} = z_n - \frac{\left[f(z_n)^2 + 2f(z_n)\frac{1 + f^{'}(z_n)^2}{f^{"}(z_n)} \right]}{\left[\left(x_{n+1} - z_n\right) + 2\frac{f^{'}\left(z_n\right)\left(1 + f^{'}(z_n)^2\right)}{f^{"}\left(z_n\right)}\right]} \quad (4.12)$$

Substitusikan Persamaan Newton ke variabel x_{n+1} sebelah kanan pada persamaan (4.12) sehingga didapat

$$x_{n+1} = z_n - \frac{\left[f(z_n)^2 + 2f(z_n)\frac{1 + f^{'}(z_n)^2}{f^{"}(z_n)} \right]}{\left[\left(\left(z_n - \frac{f(z_n)}{f^{'}(z_n)}\right) - z_n\right) + 2\frac{f^{'}\left(z_n\right)\left(1 + f^{'}(z_n)^2\right)}{f^{"}\left(z_n\right)}\right]} \quad (4.13)$$

$$x_{n+1}=z_n-\frac{\left[f(z_n)^2+2f(z_n)\frac{1+f'(z_n)^2}{f''(z_n)}\right]}{\left[-\frac{f(z_n)}{f'(z_n)}+2\frac{f'(z_n)\left(1+f'(z_n)^2\right)}{f''(z_n)}\right]}$$

$$x_{n+1}=z_n-\frac{\left[f(z_n)^2+2f(z_n)\frac{1+f'(z_n)^2}{f''(z_n)}\right]}{\left[2\frac{f'(z_n)\left(1+f'(z_n)^2\right)}{f''(z_n)}-\frac{f(z_n)}{f'(z_n)}\right]}$$

$$x_{n+1}=z_n-\frac{\left[\frac{f''(z_n)f(z_n)^2+2f(z_n)\left(1+f'(z_n)^2\right)}{f''(z_n)}\right]}{\left[\frac{2f'(z_n)^2\left(1+f'(z_n)^2\right)-f(z_n)f''(z_n)}{f'(z_n)f''(z_n)}\right]}$$

$$x_{n+1}=z_n-\left[\frac{f''(z_n)f(z_n)^2+2f(z_n)\left(1+f'(z_n)^2\right)}{2f'(z_n)^2\left(1+f'(z_n)^2\right)-f(z_n)f''(z_n)}\frac{f'(z_n)f''(z_n)}{f''(z_n)}\right]$$

$$x_{n+1}=z_n-\left[\frac{\left(f''(z_n)f(z_n)^2+2f(z_n)\left(1+f'(z_n)^2\right)\right)f'(z_n)}{2f'(z_n)^2\left(1+f'(z_n)^2\right)-f(z_n)f''(z_n)}\right] \qquad (4.14)$$

Sehingga, persamaan (4.14) dapat dituliskan kembali dengan bentuk,

$$x_{n+1}=z_n-\left[\frac{f'(z_n)f''(z_n)f(z_n)^2+2f'(z_n)f(z_n)\left(1+f'(z_n)^2\right)}{2f'(z_n)^2\left(1+f'(z_n)^2\right)-f(z_n)f''(z_n)}\right] \qquad (4.15)$$

Pada persamaan (4.15) dengan menggunakan kemiringan di $\left(w, f'(w)\right)$ dan $z_n, f'(z_n))$ maka diperoleh

$$f''(z_n)=\frac{f'(w_n)-f'(z_n)}{w_n-z_n} \qquad (4.16)$$

dengan

$$w_n=z_n-\frac{f(z_n)}{f'(z_n)'} \qquad (4.17)$$

Substitusikan persamaan (4.17) ke persamaan (4.16) sehingga diperoleh

$$f''(z_n) \approx \frac{f'(w_n) - f'(z_n)}{z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)} - z_n} \tag{4.18}$$

Dengan menyederhanakan persamaan (4.18) sehingga diperoleh

$$f''(z_n) \approx -\frac{f'(z_n)\left(f'(w_n) - f'(z_n)\right)}{f(z_n)} \tag{4.19}$$

Substitusikan persamaan (4.19) ke persamaan (4.18) sehingga diperoleh

$$x_{n+1} = z_n - \left[\frac{-f'(z_n)\frac{\left(f'(z_n)\left(f'(w_n) - f'(z_n)\right)\right)}{f(z_n)} f(z_n)^2 + 2f'(z_n)f(z_n)\left(1 + f'(z_n)^2\right)}{2f'(z_n)^2\left(1 + f'(z_n)^2\right) + f(z_n)\frac{f'(z_n)\left(f'(w_n) - f'(z_n)\right)}{f(z_n)}}\right]$$

$$x_{n+1} = z_n - \left[\frac{-f(z_n)f'(z_n)f'(w_n) + f(z_n)f'(z_n)^2 + 2f(z_n) + 2f(z_n)f'(z_n)^2}{2f'(z_n) + 2f'(z_n)^3 + f'(w_n) - f'(z_n)}\right]$$

$$x_{n+1} = z_n - \left[\frac{f(z_n)\left(-f'(z_n)f'(w_n) + f'(z_n)^2 + 2 + 2f'(z_n)^2\right)}{f'(z_n) + 2f'(z_n)^3 + f'(w_n)}\right] \tag{4.20}$$

maka persamaan (4.16) dapat ditulis kembali dalam bentuk

$$x_{n+1} = z_n - \left[\frac{f(z_n)\left(2 - f'(z_n)f'(w_n) + 3f'(z_n)^2\right)}{f'(z_n) + 2f'(z_n)^3 + f'(w_n)}\right] \tag{4.21}$$

Jadi persamaan (4.21) merupakan iterasi baru dari modifikasi metode Potra-Ptak menggunakan kelengkungan kurva.

Cara berbeda dapat diturunkan dengan manipulasi persamaan (4.8) variabel $\left(x_{n+1} - z_n\right)^2$ diganti dengan iterasi Newton maka akan didapat

$$\left(z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)} - z_n)\right)^2 + 2\frac{(f'(z_n)(1 + f'(z_n)^2)}{f'(z_n)}(x_{n+1} - z_n) + f(z_n)^2 + 2f(z_n)\frac{1 + f'(z_n)^2}{f'(z_n)} = 0$$

$$\left(\frac{f(z_n)}{f'(z_n)}\right)^2 + 2\frac{(f'(z_n)(1 + f'(z_n)^2)}{f'(z_n)}(x_{n+1} - z_n) + f(z_n)^2 + 2f(z_n)\frac{1 + f'(z_n)^2}{f'(z_n)} = 0 \quad (4.22)$$

Persamaan (4.18) dapat ditulis kembali menjadi

$$2\frac{\left(f'(z_n)\left(1+f'(z_n)^2\right)\right)}{f'(z_n)'}\left(x_{n+1}-z_n\right)=-\left(\frac{f(z_n)}{f'(z_n)}\right)^2-f(z_n)^2-2f(z_n)\frac{1+f'(z_n')^2}{f'(z_n)} \quad (4.23)$$

Selanjutnya variabel $2\frac{\left(f'(z_n)\left(1+f'(z_n)^2\right)\right)}{f''(z_n)'}$ dipindahkan keruas kanan sehingga diperoleh

$$\left(x_{n+1}-z_n\right)=\left[\frac{-\left(\frac{f(z_n)^2}{f'(z_n)^2}+f(z_n)^2+2f(z_n)\frac{1+f'(z_n')^2}{f''(z_n)}\right)}{2\frac{\left(f'(z_n)\left(1+f'(z_n)^2\right)\right)}{f'''(z_n)}}\right] \quad (4.24)$$

Persamaan (4.24) dapat dijabarkan menjadi

$$x_{n+1}=z_n-\left[\frac{\frac{f(z_n)^2 f''(z_n)+f(z_n)^2 f'(z_n)^2 f''(z_n)+2f(z_n)f'(z_n)^2\left(1+f'(z_n)^2\right)}{f'(z_n)^2 f''(z_n)}}{\frac{2f'(z_n)\left(1+f'(z_n)^2\right)}{f''(z_n)}}\right] \quad (4.25)$$

$$x_{n+1}=z_n-\left[\frac{f(z_n)^2 f''(z_n)+f(z_n)^2 f'(z_n)^2 f''(z_n)+2f(z_n)f'(z_n)^2\left(1+f'(z_n)^2\right)}{2f'(z_n)^2 f'(z_n)\left(1+f'(z_n)^2\right)}\right]$$

$$x_{n+1}=z_n-\left[\frac{\left[\left(f(z_n)^2 f''(z_n)\right)\left(\left(1+f'(z_n)^2\right)\right)\right]+\left[2f(z_n)f'(z_n)^2\left(1+f'(z_n)^2\right)\right]}{2f'(z_n)^3\left(1+f'(z_n)^2\right)}\right]$$

$$x_{n+1}=z_n-\left[\frac{\left(f(z_n)^2 f''(z_n)+2f(z_n)f'(z_n)^2\right)\left(1+f'(z_n)^2\right)}{2f'(z_n)^3\left(1+f'(z_n)^2\right)}\right]$$

$$x_{n+1}=z_n-\left[\frac{f(z_n)^2 f''(z_n)+2f(z_n)f'(z_n)^2}{2f'(z_n)^3}\right] \quad (4.26)$$

Selanjutnya dengan menggunakan aproksimasi persamaan (4.16) terhadap persamaan (4.26) diatas,maka didapatkan

$$x_{n+1}=z_n-\left[\frac{-f(z_n)^2\frac{f'(z_n)\left(f'(w_n)-f'(z_n)\right)}{f(z_n)}+2f(z_n)f'(z_n)^2}{2f'(z_n)^3}\right]$$

$$x_{n+1} = z_n - \left[\frac{-f(z_n)^2 f^{'}(z_n)\left(f^{'}(w_n) - f^{'}(z_n)\right) + 2 f(z_n)^2 f^{'}(z_n)^2}{2 f(z_n) f^{'}(z_n)^3} \right]$$

$$x_{n+1} = z_n - \left[\frac{f(z_n)}{2 f^{'}(z_n)} \left(\frac{-f(z_n) f^{'}(z_n)\left(f^{'}(w_n) - f^{'}(z_n)\right) + 2 f(z_n) f^{'}(z_n)^2}{f(z_n) f^{'}(z_n)^2} \right) \right]$$

$$x_{n+1} = z_n - \left[\frac{f(z_n)}{2 f^{'}(z_n)} \left(\frac{-f(z_n) f^{'}(z_n) f^{'}(w_n) + f(z_n) f^{'}(z_n)^2 + 2 f(z_n) f^{'}(z_n)^2}{f(z_n) f^{'}(z_n)^2} \right) \right]$$

$$x_{n+1} = z_n - \left[\frac{f(z_n)}{2 f^{'}(z_n)} \left(\frac{-f(z_n) f^{'}(z_n) f^{'}(w_n) + 3 f(z_n) f^{'}(z_n)^2}{f(z_n) f^{'}(z_n)^2} \right) \right]$$

$$x_{n+1} = z_n - \left[\frac{f(z_n)}{2 f^{'}(z_n)} \left(\frac{3 f(z_n) f^{'}(z_n)^2}{f(z_n) f^{'}(z_n)^2} - \frac{f(z_n) f^{'}(z_n) f^{'}(w_n)}{f(z_n) f^{'}(z_n)^2} \right) \right]$$

$$x_{n+1} = z_n - \left[\frac{f(z_n)}{2 f^{'}(z_n)} \left(3 - \frac{f^{'}(w_n)}{f^{'}(z_n)} \right) \right] \qquad (4.27)$$

Selanjutnya persamaan (4.27) dapat ditulis dalam bentuk

$$x_{n+1} = z_n - \frac{1}{2} \left[3 - \frac{f^{'}(w_n)}{f^{'}(z_n)} \right] \frac{f(z_n)}{f^{'}(z_n)} \qquad (4.28)$$

Jadi persamaan (4.28) merupakan metode iterasi baru dari modifikasi potra menggunakan kelengkungan kurva. Jadi dapat disimpulkan rumusan baru metode Potra menggunakan kelengkungan kurva adalah sebagai berikut:

$$w_n = z_n - \frac{f(z_n)}{f^{'}(z_n)^{'}}$$

$$z_n = x_n - \frac{f(x_n) + f(y_n)}{f^{'}(x_n)}$$

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_{n+1} = z_n - \frac{1}{2} \left[3 - \frac{f^{'}(w_n)}{f^{'}(z_n)} \right] \frac{f(z_n)}{f^{'}(z_n)}$$

4.2 Analisa Kekonvergenan

Pada bagian sub bab berikut akan dibahas mengenai analisa kekonvergenan metode Potra yang dimodifikasi dengan menggunakan kelengkungan kurva, yang dituliskan pada persamaan (4.28). Berikut ini teorema yang memberikan persamaan tingkat kesalahan dari persamaan (4.28) yang menunjukkan orde konvergensinya.

Teorema 4.2.1 Diberikan $f(x)$ adalah fungsi bernilai rill yang mempunyai turunan di $f : I \subseteq R \to R$, untuk I interval terbuka. Jika x_0 menghampiri $\sim$ maka persamaan (4.28) di atas mempunyai orde konvergensi enam dengan persamaan error:

$$e_{n+1} = (2c_2{}^4 - 12c_2{}^5)e_n{}^6 + O(e_n{}^7) \tag{4.29}$$

dengan $e_n = x_n - \sim$ dan $C_k = \dfrac{1}{k!}\dfrac{f^{(k)}(\sim)}{f'(\sim)}$, k = 1, 2, 3, ...

Bukti: Misalkan $\sim$ adalah akar dari $f(x)$, maka $f(\sim) = 0$. Asumsikan $f'(x) = 0$ dan $x_n = \sim + e_n$. Pada persamaan (2.26) telah diketahui bahwa

$$\begin{aligned}
y_n &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\
&= x_n - \left(e_n - c_2 e_n^2 + 2\left(c_2^2 - c_3\right)e_n^3 + O\left(e_n^4\right)\right) \\
&= \sim + e_n - \left(e_n - c_2 e_n^2 + 2\left(c_2^2 - c_3\right)e_n^3 + O\left(e_n^4\right)\right) \\
&= \sim + c_2 e_n^2 - 2\left(c_2^2 - c_3\right)e_n^3 + O\left(e_n^4\right)
\end{aligned}$$

Selanjutnya

$$\begin{aligned}
\frac{f(x_n) + f(y_n)}{f'(x_n)} &= \frac{c_2 e_n{}^2 + \left(2c_3 - 2c_2^2\right)e_n{}^3 + \left(-7c_2c_3 + 3c_4 - 4c_2^3\right)e_n{}^4}{\left(1 + 2c_2 e_n + 3c_3 e_n{}^2 + O\left(e_n{}^3\right)\right)} \\
&= \sim + 2c_2^2 e_n^3 + \left(-8c_2^3 + 7c_2c_3\right)e_n^4 + O\left(e_n^5\right)
\end{aligned}$$

dengan demikian maka diperoleh

$$z_n = x_n - \frac{f(x_n) + f(y_n)}{f'(x_n)}$$

$$= \sim + 2c_2^2 e_n^3 + \left(-8c_2^3 + 7c_2 c_3\right)e_n^4 + O\left(e_n^5\right) \tag{4.30}$$

maka

$$f(z_n) = f^{'}(\sim)\left(2c_2^2 e_n^3 + \left(-8c_2^3 + 7c_2 c_3\right)e_n^4 + O\left(e_n^5\right)\right)$$

$$f^{'}(z_n) = f^{'}(\sim)\left(1 + 4c_2^3 e_n^3\right) + \left(-16c_2^4 + 14c_2^2 c_3\right)e_n^4 + O\left(e_n^5\right)$$

sehingga

$$\frac{f(z_n)}{f^{'}(z_n)} = \frac{f^{''}(\sim)\left(2c_2^2 e_n^3\right) + \left(-8c_2^3 + 7c_2 c_3\right)e_n^{\ 4} + O\left(e_n^{\ 5}\right)}{f^{'}(\sim)\left(1 + 4c_2^3 e_n^3 + \left(-16c_2^4 + 14c_2^2 c_3\right)\right)e_n^4 + O\left(e_n^5\right)}$$

$$= \left(2c_2^2 e_n^3\right) + \left(-8c_2^3 + 7c_2 c_3\right)e_n^{\ 4} + O\left(e_n^{\ 5}\right)x\left(1 + 4c_2^3 e_n^3 + \left(-16c_2^4 + 14c_2^2 c_3\right)e_n^4 + O\left(e_n^5\right)\right)^{-1}$$

$$= \left(2c_2^2 e_n^3\right) + \left(7c_2 c_3 - 8c_2^3\right)e_n^4 + O\left(e_n^5\right) \tag{4.31}$$

kemudian substitusikan persamaan (4.29) dan (4.30) ke persamaan w_n sehingga didapatkan,

$$w_n = z_n - \frac{f(z_n)}{f^{'}(z_n)}$$

$$= \sim + 2c_2^2 e_n^3 + \left(-8c_2^3 + 7c_2 c_3\right)e_n^4 + O\left(e_n^5\right) - \left(2c_2^2 e_n^3\right) + \left(7c_2 c_3 - 8c_2^3\right)e_n^4 + O\left(e_n^5\right)$$

$$= 12c_2^5 e_n^6 + \left(-84c_2^2 c_3 + 96c_2^6\right)e_n^7 + O\left(e_n^8\right)$$

sedemikian hingga

$$f(w_n) = f^{'}(\sim)\left(12c_2^5 e_n^6 + \left(-84c_2^2 c_3 + 96c_2^6\right)e_n^7 + O\left(e_n^8\right)\right)$$

$$f^{'}(w_n) = f^{'}(\sim)\left(1 - 24c_2^6 e_n^6\right) + \left(-168c_2^5 c_3 + 192c_2^7\right)e_n^7 + O\left(e_n^8\right))$$

selanjutnya dengan cara yang sama maka diperoleh

$$\frac{f^{'}(w_n)}{f^{'}(z_n)} = \frac{f^{'}(\sim)\left(1 + \left(-24c_2^6 e_n^6\right) + \left(-168c_2^5 + 192c_2^7\right)e_n^7 + O\left(e_n^8\right)\right)}{f^{'}(\sim)\left(1 + 4c_2^3\right)e_n^3 + \left(-16c_2^4 + 14c_2^2 c_3\right)e_n^4 + O\left(e_n^5\right)}$$

$$= \left(1 + \left(-24c_2^6 e_n^6\right) + \left(-168c_2^5 + 192c_2^7\right)e_n^7 + O\left(e_n^8\right)\right)$$

$$x\left(1 + 4c_2^3\right)e_n^3 + \left(-16c_2^4 + 14c_2^2 c_3\right)e_n^4 + O\left(e_n^{\ 5}\right))^{-1}$$

$$= 1 + 2c_2^2 e_n^3 + \left(7c_2 c_3 - 8c_2^3\right)e_n^4 + O\left(e_n^5\right) \tag{4.32}$$

Selanjutnya substitusikan persamaan $(4.30),(4.31)$ dan (4.32) kepersamaaan (4.28) sehingga diperoleh

$$x_{n+1} = z_n - \frac{1}{2}\left[3 - \frac{f'(w_n)}{f'(z_n)}\right]\frac{f(z_n)}{f'(z_n)}$$

$$= \sim + 2c_2^2 e_n^3 + \left(-8c_2^3 + 7c_2 c_3\right)e_n^4 + O\left(e_n^5\right) - \frac{1}{2}\left(3 - \left(1 + 2c_2^2 e_n^3\right) + \left(7c_2 c_3 - 8c_2^3\right)e_n^4\right.$$

$$\left. + O\left(e_n^5\right)x\left(1 + 2c_2^2 e_n^3 + \left(7c_2 c_3 - 8c_2^3\right)e_n^4 + O\left(e_n^5\right)\right)\right)$$

$$= \sim + \left(2c_2^4 - 12c_2^5\right)e_n^6 + O\left(e_n^7\right) \qquad (4.33)$$

Oleh karena $x_{n+1} = e_{n+1} + \sim$ maka persamaan (4.30) menjadi

$$x_{n+1} = \sim + \left(2c_2^4 - 12c_2^5\right)e_n^6 + O\left(e_n^7\right)$$

$$e_{n+1} + \sim = \sim + \left(2c_2^4 - 12c_2^5\right)e_n^6 + O\left(e_n^7\right)$$

$$e_{n+1} = \left(2c_2^4 - 12c_2^5\right)e_n^6 + O\left(e_n^7\right) \qquad (4.34)$$

Persamaan (4.34) merupakan orde konvergensi dari modifikasi metode Potra-Ptak menggunakan kelengkungan kurva yang menghasilkan orde konvergensi enam.

Berdasarkan defenisi 2.3, metode Potra-Ptak mempunyai enam fungsi $f(x_n)$, $f'(x_n)$, $f(y_n)$, $f'(w_n)$, $f(z_n)$, $f'(z_n)$,sedangkan orde konvergensinya tingkat enam maka nilai indeksnya adalah

$$E = P^{\frac{1}{w}}$$

$$= 6^{\frac{1}{6}}$$

$$= 1{,}348006155$$

Jadi persamaan orde konvergensi dari modifikasi di atas indeks efisiensinya adalah 1,348006155

4.3 Simulasi Numerik

Pada sub bab ini, akan diberikan simulasi numerik dari metode baru dari modifikasi metode Potra-Ptak menggunakan kelengkungan kurva, yang dituliskan pada persamaan (4.28), menggunakan *software* Matlab versi 7.0.4. Dengan tujuan untuk menunjukkan keefektivan persamaan (4.28) dalam menghampiri akar fungsi suatu persamaan. Fungsi-fungsi yang digunakan kami ambil dari jurnal *"A Simple iterative method with fifth-order convergence by using Potra and Ptak's Method"*. Adalah sebagai berikut:

$$f_1(x) = x^2 - e^x - 3x + 2 \qquad \sim \approx 0{,}257530285439861$$

$$f_2(x) = xe^{x^2} - \sin^2(x) + 3\cos(x) + 5 \qquad \sim \approx -1{,}20764782713091$$

$$f_3(x) = x^3 + 4x^2 - 10 \qquad \sim \approx 1{,}365230013414097$$

$$f_4(x) = e^x + x - 20 \qquad \sim \approx 2{,}8424389537844471$$

$$f_5(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{x} - 3 \qquad \sim \approx 9{,}633595562832696$$

$$f_6(x) = e^{x^2+7x-30} - 1 \qquad \sim \approx 3{,}00000000000000$$

Selanjutnya simulasi numerik dari persamaan (4.28) akan dibandingkan jumlah iterasinya dengan beberapa metode iteratif dalam menghampiri akar persamaan nonlinear. Metode Newton orde dua dinotasikan sebagai (NW), metode Potra orde tiga dinotasikan sebagai (PTR), selanjutnya metode Newton ganda orde empat dinotasikan sebagai (NG), berikutnya metode double Potra dinotasikan sebagai (DPTR), dan yang terakhir dari persamaan (4.28) metode Potra yang dimodifikasi menggunakan kelengkungan kurva menghasilkan konvergensi orde enam dinotasikan sebagai (PTRC). Berdasarkan hasi perhitungan komputasi atau simulasi numerik diperoleh jumlah iterasi dari berbagai metode sebagai berikut

Tabel 4.3 Perbandingan Jumlah Iterasi

$f(x)$	x_0	Jumlah Iterasi				
		NW	PTR	NG	DPTR	PTRC
$f_1(x)$	10	13	10	7	7	5
	3,0	6	4	3	3	3
$f_2(x)$	-5	31	22	3	3	2
	-1	6	4	3	3	3
$f_3(x)$	10	9	7	7	5	4
	3,0	6	4	3	3	2
$f_4(x)$	7,7	10	7	5	5	4
	5,2	7	5	4	4	3
$f_5(x)$	20	6	5	3	3	2
	25	6	4	3	3	2
$f_6(x)$	4,0	19	14	10	10	7
	5,0	35	25	18	18	13

Berdasarkan Tabel (4.3) di atas menunjukkan bahwa metode yang orde konvergensinya tinggi memilik iterasi yang sedikit dibandingakan dengan metode yang orde konvergensinya rendah. Seperti metode Potra yang dimodifikasi dengan kelengkungan kurva menghasilkan orde enam jumlah iterasinya lebih sedikit dibandingkan dengan metode Potra yang memiliki orde konvergensi tiga.

Selanjutnya untuk menegaskan tingkat orde konvergensi suatu metode iterasi, bisa dilakukan dengan metode *Computational Order of Convergence* (COC). Berikut ini adalah tabel perbandingan COC dari metode Newton (NW, Jhon Mathew 1992), metode Potra (PTR, Zhong LI, 2011), Newton Ganda (NG, Sanjai K Khattri dan Ravi P, 2010), Double Potra (DPTR, Reza Erzati, 2009) dan yang terakhir metode Potra yang dimodifikasi menggunakan kelengkungan kurva (PTRC).

Tabel 4.4 Perbandingan Nilai COC

$f(x)$	x_0	COC				
		NW	PTR	NG	DPTR	PTRC
$f_1(x)$	10	1,99	2,97	3,76	10,52	8,25
	3,0	2,00	3,03	1,93	0,98	10,04
$f_2(x)$	-5	2,02	2,96	3,12	2,96	Ttd
	-1	1,99	3,03	1,26	Ttd	1,27
$f_3(x)$	10	2,00	2,89	3,78	4,75	5,67
	3,0	1,99	2,84	2,93	3,95	Ttd
$f_4(x)$	7,7	1,99	2,96	3,76	4,02	6,82
	5,2	1,99	2,93	3,89	4,59	Ttd
$f_5(x)$	20	2,00	2,98	Ttd	Ttd	Ttd
	25	2,00	2,98	Ttd	Ttd	Ttd
$f_6(x)$	4,0	1,99	2,97	3,91	3,79	4,63
	5,0	1,98	2,97	3,90	4,08	4,30

Keterangan :

$x_0 =$ Nilai Awal

Ttd = Tidak Terdefinisi

Pada Tabel 4.4 mengambarkan perbandingan nilai orde konvergensi secara numerik. Secara umum hasil perhitungan orde konvergensi secara numerik (COC) untuk metode iterasi yang memiliki orde konvergensi yang lebih tinggi secara teori menunjukkan nilai COC lebih tinggi dibandingkan metode iterasi yang memiliki orde konvergensi yang lebih rendah. Tabel (4.4) juga menunjukkan bahwa orde konvergensi pada setiap metode berbeda-beda. Hal ini terjadi karena masing-masing metode mempunyai cara yang berbeda dalam menghampiri akar dari suatu persamaan, juga dapat terjadi karena fungsi yang diberikan dan nilai awal yang diberikan pada fungsi tersebut berbeda.

Selanjutnya untuk melihat keefektifan persamaan orde konvergensinya maka bisa dilihat dari indeks efisiensi dari masing masing metode. Berikut ini akan dijelaskan indeks efisiensi dari metode Newton (NW), metode Potra (PTR), Newton Ganda (NG), Double Potra (DPTR) dan yang terakhir metode Potra yang dimodifikasi menggunakan kelengkungan kurva (PTRC). Berdasarkan defenisi 2.3, metode Newton memiliki indeks efisiensi $1{,}414$, metode Potra-Ptak $1{,}442$, metode Newton Ganda $1{,}414$, metode Double Potra $1{,}709$, modifikasi Potra-Ptak menggunakan kelengkungan Kurva indeks efisiensi 1,348. Berdasarkan teori indeks efisiensi, yang memiliki indeks efisiensi lebih tinggi persamaan orde konvergensinya cukup efektif dalam menyelesaikan persamaan nonlinier. Berdasarkan hasil indeks efisiensi maka modifikasi metode Potra-Ptak menggunakan kelengkungan kurva indeks efisiensinya cenderung lebih kecil karena memiliki 6 evaluasi fungsi: 3 evaluasi fungsi dan 3 evaluasi turunannya.

BAB V
PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Metode Potra adalah salah satu metode yang digunakan untuk menentukan akar-akar persamaan nonliniear dengan konvergensi orde tiga. Berdasarkan penelitian, diperoleh rumusan baru dari modifikasi metode Potra menggunakan kelengkungan kurva yang memiliki konvergensi orde enam. Rumusan baru dari modifikasi metode Potra dapat dituliskan sebagai berikut;

$$x_{n+1} = z_n - \frac{1}{2}\left[3 - \frac{f'(w_n)}{f'(z_n)}\right]\frac{f(z_n)}{f'(z_n)}, n = 0,1,2,3,...$$

dengan,

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$z_n = x_n - \frac{f(x_n) + f(y_n)}{f'(x_n)}$$

$$w_n = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)}$$

dan persamaan errornya sebagai berikut;

$$e_{n+1} = \left(2c_2^4 - 12c_2^5\right)e_n^6 + O\left(e_n^7\right)$$

Semakin tinggi orde konvergensi suatu metode iterasi, semakin sedikit jumlah iterasi yang diperlukan dalam menghampiri akar-akar persamaan nonlinear. Hal ini dapat terlihat pada Tabel 4.3 dan Tabel 4.4, metode Potra yang dimodifikasi menggunakan kelengkungan kurva secara umum memiliki iterasi yang sedikit dalam menghampiri persamaan nonlinear dan memiliki nilai COC yang lebih tinggi dibandingkan dengan metode Newton dan metode Potra dan nilai indeks efisiensinya 1,348006155 Sehingga, metode ini lebih efektif dalam menyelesaikan persamaan nonlinier dibandingkan metode lainnya yang memiliki orde konvergensi yang lebih rendah.

5.2 Saran

Pada penelitian ini penulis memodifikasi metode Potra yang berorde tiga menggunakan kelengkungan kurva. Tugas akhir ini penulis lakukan karena ingin mengembangkan metode potra yang sebelumnya diteliti oleh Zhong LI ,Chengsong PENG ,,Thianhe ZHOU, dan Jun GAO (2011) yang telah memodifikasi metode Jarrat menggunakan Kelengkunngan Kurva. Pada skripsi ini penulis melakukan modifikasi metode Potra menggunakan Kelengkunngan Kurva. Oleh sebab itu, disarankan pada pembaca untuk melakukan modifikasi terhadap metode Potra menggunakan aturan Trapesium dan modifikasi metode Double Potra dengan menggunakaan Kelengkungan Kurva.

DAFTAR PUSTAKA

Azadegan, E. dan Ezzati reza, "*A Simple iterative method with fifth-order convergence by using Potra and Ptak's Method*". Mathematical Sciences. 2:191-200, 2009

Chun, Changbum, "*Some Improvement of Jarrat's Method with Sixth-order Convergence*". *Applied Mathematics and Computation*. Vol. 190, halaman 1432-1437, 2007

JR, Frank Ayres & Elliot Mendelson, *Kalkulus Edisi Keempat*, Erlangga, Jakarta, 2004

Kim, Yong-Il, Changbun Chun, Weonbae Kim, *Some Third-Order Curvature Based Methods for solving Nonlinear Equations*, Studies in Nonlinear Sciences 1, (3):72-76,2010.

Li Zhong, PENG Chensong, ZHOU Tianhe, dan GAO jun, *"A New Newton –type Method for solving Nonliner Equation with Any Integer Order of Convergence"*.Departement of Mathematics and science, 7: 2371-2378,2011.

Mathews, John H., *Numerical Methods for Mathematics Science and Engineering, Second Edition,* Prentice-Hall International,Inc, United States of America.1992.

Purcell, Edwin J., Dale Varberg., Steven E. Rigdon, *Kalkulus Edisi Kedelapan. Jilid 2,* Erlangga, Jakarta. 2004.

Weerakon, S. dan T.G.I. Fernando, "*A Variant of Newton's Method With Accelerated Third-Order Convergence*". Applied Mathematics Letters. 13:87-93, 2000.

Kumar Singth,Manoj, *"A Six-Order Variant Of Newton's Method For Solving Nonlinier Equation "*. Computional Method in Science and Technology 15(2), 185-193, 2009.